Propunere de proiect

**Titlul proiectului:** Aproximari de functii utilizand polinoame de grade foarte mari si aplicatii

**Autor:** Silviu-Ioan Filip

**Conducator stiintific:** Prof. Dr. Ing. Octavian CRET

**Introducere – Obiectivele si scopul proiectului:**

* **Scop:** Evaluarea utilizarii retelelor laticiale euclidiene pentru a a aproxima functii numerice prin polinoame de grad foarte mare (200 – 1000) in vederea adaptarii ulterioare a acestei metode pentru a aproxima filtre digitale
* **Obiective:** (1) Studierea cazului particular (degenerat) de aproximare pentru polinoame intregi Chebyshev utilizand algoritmul LLL si compararea rezultatelor obtinute cu alte metode exacte existente.

(2) Studierea unor metode de aproximare polinomiala generice in care coeficientii polinomiali sunt numere reale (nerestranse la setul numerelor ce pot fi reprezentate intr-un sistem de calcul, cum sunt de exemplu, formatele in virgula mobila IEEE 754-2008).

(3) Adaptarea metodei utilizate in (1) pentru a fi utilizata in cazul general de aproximare al unei functii oarecare tinand cont de niste formate impuse pentru coeficientii polinomului si compararea acestei abordari cu metodele studiate la (2).

(4) Formularea unor concluzii referitoare la posibila utilizare a metodei implementate in (3) pentru a crea aproximari de filtre digitale foarte precise.

**Descrierea continutului proiectului:**

Teoria aproximarii joaca un rol prevalent azi, fiind unul dintre stalpii de sustinere pentru cercetarea stiintifica, inginerie, finante si multe alte domenii. Deoarece sistemele de calcul pe care le folosim sunt limitate la a reprezenta un set finit de valori la nivel hardware si software, iar cantitatile cu care lucram in viata de zi cu zi sunt valori inerent continue care nu au neaparat o reprezentare exacta in formatele utilizate de aceste sisteme, dorim ca rezultatele calculelor pe care le efectuam cu aceste valori sa fie cat mai precise. Dintre aceste calcule, lucrul cu functii (trigonometrice, exponentiale, logaritmice etc.) este poate cel mai important si constituie obiectul de lucru al acestui proiect.

Principalele rezultate folosite in cadrul acestui proiect vin din teoria retelelor laticiale euclidiene. O retea laticiala este o multime de puncte dintr-un spatiu vectorial ce se defineste ca toate combinatiile intregi ale unor vectori liniar independenti (baza retelei). Problemele de aproximare pe care incerc sa le rezolv se reduc la probleme clasice din acest domeniu, si anume SVP (*engl.* shortest vector problem) si CVP (*engl.* closest vector problem). S-a demonstrat ca aceste probleme sunt NP-dure cu algoritmi exacti ce ruleaza in timp exponential. Din cauza ca dimeniunile cu care lucrez sunt foarte mari (de ordinul sutelor), utilizarea acestor algoritmi este intractabila in aceasta situatie. Din aceasta cauza folosesc niste algoritmi polinomiali (LLL si Babai), mult mai rapizi, care ofera doar aproximari pentru rezultatele acestor probleme. Desi nu sunt exacti, experienta a dovedit ca acesti algoritmi ofera rezultate foarte bune in practica.

**Studiu bibliografic**

Dispunem de multe rezultate teoretice care trateaza problema aproximarii functiilor utilizand polinoame cu coeficienti reali (a se vedea de exemplu algoritmul clasic al lui Remez). Aceste abordari, desi exacte, sufera pierderi de acuratete in momentul in care coeficientii polinoamelor sunt rotunjiti la preciziile cu care lucreaza calculatoarele. Rezultatele au aratat ca (vezi [1]), in majoritatea cazurilor se pot obtine aproximari mult mai bune daca se utilizeaza algoritmi specializati pe lucrul cu numerele reprezentabile de calculator (vezi [2]) (in virgula fixa, virgula mobila cu simpla sau dubla precizie, etc.). Implementarile curente pentru acesti algoritmi lucreaza cu polinoame de grad maxim 50, iar rezultatele obtinute sunt de cele mai multe ori mai bune decat cele obtinute cu metode mai clasice, cum ar fi algorimul lui Remez. Acest proiect doreste sa fie un studiu al metodelor utilizate in [1] cu realizarea unei implementari care sa permita utilizarea unor grade de polinoame mult mai mari de ordinul sutelor, cu speranta de a se ajunge la gradul 1000 pana la sfarsitul acestei proiect. Obtinerea unor rezultate bune in cadrul acestui studiu ar motiva extinderea abordarilor folosite intr-un context mult mai general, acela al aproximarii de filtre digitale.

**Resurse necesare**

* Hardware: sistem Intel x86 sau x64, frecventa > 2.0GHz, 4-8GB RAM
* Sistem de operare: Linux (preferabil distributie bazata pe Debian sau Fedora)
* Librarii software utilizate (sub licente din familia GPL):
* GMP: <http://gmplib.org/>
* MPFR: <http://www.mpfr.org/>
* Sollya: <http://sollya.gforge.inria.fr/>
* MPFI: <http://gforge.inria.fr/projects/mpfi/>
* fplll: <http://perso.ens-lyon.fr/xavier.pujol/fplll/>
* ATLAS: <http://math-atlas.sourceforge.net/>
* IML: <http://www.cs.uwaterloo.ca/~astorjoh/iml.html>

**Rezultate asteptate**

Asteptarile sunt ca aproximarile obtinute pentru polinoamele de grade foarte mari sa dea o acuratete foarte buna (nu am elemente de comparatie in acest caz), iar in cazul aproximarilor obtinute pentru polinoamele intregi Chebyshev, rezultatele sa fie foarte apropiate de rezultatele exacte care se cunosc actualmente.

**Planificarea elaborarii proiectului pe saptamani**

* studiul principalelor rezultate teoretice clasice din teoria aproximatiei referitoare la aproximarile polinomiale; (4 saptamani)
* studiul principalelor rezultate din domeniul retelelor laticiale euclidiene si realizarea unor implementari de jucarie pentru principalii algoritmi utilizati (LLL si Babai) in vederea unei mai bune intelegeri a lor; (2 saptamani)
* stabilirea problemei particulare care va fi tratata in prima instanta (polinoamele intregi Chebyshev); (1 saptamana)
* analiza comportamentului vectorilor ortogonali corespunzatori reprezentarii laticiale a problemei particulare in vederea stabilirii calitatii rezultatelor obtinute prin aplicarea algoritmului LLL; (1 saptamana)
* determinarea si testarea unei metode de rezolvare a unei sistem de ecuatii liniare de grad foarte mare (pana in 1000 X 1000) cu coeficienti intregi de valori foarte mari; (2 saptamani)
* utilizarea algoritmului de la punctul precedent pentru a realiza o implementare care sa ofere o rezolvare pentru cazul particular al polinoamelor intregi Chebyshev; (2 saptamani)
* implementarea algoritmului lui Babai utilizand algoritmul LLL; (1 saptamana)
* realizarea unei implementari pentru cazul general; (3 saptamani)
* interpretarea rezultatelor obtinute + intocmirea lucrarii de licenta (aceasta ultima parte se poate realiza pe parcursul desfasurarii proiectului, odata ce faza de fundamentare teoretica a fost incheiata). (4-6 saptamani)
* integrarea aplicatiei obtinute intr-un produs software matematic cum ar fi [Sage](http://www.sagemath.org/) (2 saptamani)

**Cuprins preliminar**

**Introducere**

**Studiu bibliografic (State of the art)**

**Aritmetica in virguala floatanta**

**Obiective si specificatii**

**Fundamentarea teoretica**

**Rezultate clasice privind aproximarile polinomiale**

**Motivarea utilizarii polinoamelor**

**Cel mai bun polinom de aproximare**

**Algoritmul lui Remez**

**Constangeri asupra coeficientiilor**

**Retele laticiale euclidiene**

**Notiuni de baza**

**Problema celui mai scurt vector (SVP)**

**Problema celui mai apropiat vector (CVP)**

**Rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare de ordin mare**

**Calcularea de polinoame de aproximare eficiente**

**Lucrul cu numere reprezentabile pe calculator**

**Algoritmul Fpminimax**

**Implementare**

**Mediul de lucru**

**Librariile utilizate**

**Cazul degenerat**

**Aproximarea polinoamelor Chebyshev intregi**

**Cazul general**

**Rezultate exeperimentale**

**Certificarea rezultatelor obtinute**

**Concluzii**

**Bibliografie**

**Bibliografie**

**[1]** Sylvain Chevillard. Evaluation efficace de functions numeriques. Outils et examples, Teza de doctorat, Ecole Normale Superieure de Lyon, 2009

**[2]** Nicolas Brisebarre, Jean-Michel Muller, and Arnaud Tisserand. Computing machine-effcient

polynomial approximations. ACM Transactions on Mathematical Software, 32(2):236-256, 2006.

**[3]** Damien Stehle. Algorithmique des reeseaux euclidiens, Note de curs, 2007

**[4]** M. R. Bremner. Lattice Basis Reduction. An Introduction to the LLL Algorithm and Its

Applications. CRC Press, 2011

**[5]** M. Ajtai. The shortest vector problem in L2 is NP-hard for randomized reductions (extended

abstract). In STOC, pages 10-19, 1998

**[6]** Jean-Michel Muller, Nicolas Brisebarre, Florent de Dinechin, Claude-Pierre Jeannerod, Vincent

Lefevre, Guillaume Melquiond, Nathalie Revol, Damien Stehle, and Serge Torres. Hand-

book of Floating-Point Arithmetic. Birkhauser Boston, 2010.